Prise en compte d'informations du type "conditions aux limites" dans les modèles de krigeage

Bertrand GAUTHIER
École des Mines de Saint-Étienne

Présentation : Je me nomme Bertrand GAUTHIER et je suis doctorant en Mathématiques Appliquées à l'école des mines de Saint-Etienne. J'ai suivi un cursus universitaire (physique puis mathématiques) et j'ai débuté mon doctorat en octobre 2007.

Mes travaux portent principalement sur l'utilisation des méthodes à noyaux pour la modélisation, principalement le conditionnement de processus gaussiens. Les noyaux apparaissant dans différentes branches des mathématiques : probabilité, analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs,. . . ; l'objectif de ma thèse est de tenter de produire des modèles de krigeage plus "riches" en utilisant les résultats de ces différents domaines. Je citerais par exemple la prise en compte par d'informations "a priori", ou encore le respect de conditions aux limites, point qui sera d'ailleurs abordé par la suite.

Idée Générale : Le krigeage (au sens "conditionnement de processus gaussiens") est de plus en plus utilisé pour modéliser des phénomènes complexes. Ce type de modèle est construits à partir d'un noyau (structure de covariance) et d'un nombre finis d'observations. Néanmoins, dans certains cas, la réponse du phénomène (ou tout autre information concernant la réponse, comme son gradient) peut être considérée comme connue en une infinité de points, par exemple, lorsque cette dernière est supposée connue sur les bords du domaine d'étude (conditions aux limites).

Si l'on ne souhaite pas modifier la structure de covariance préalablement choisie et à condition que la condition aux limites soit compatible avec la structure de covariance considérée ; les équations classiques du krigeage ne permettent pas de rendre compte de ce type d'information, la réponse étant dans ce cas connue en une infinité de points.

L'idée principale de notre démarche est de considérer les "endroits" où la réponse est connue comme le support d'une mesure μ. On introduit alors, sous certaines conditions, l'opérateur :

$$T_\mu\left(f\right)(x) = \int K(x,t)f(t)d\mu(t),$$

où $K(\cdot,\cdot)$ est le noyau de covariance. C'est l'étude du spectre de cet opérateur qui nous permet de caractériser précisément la projection orthogonale associée au conditionnement en question.

Pour résumer, si on pose $S = supp(\mu)$ et on considère un processus gaussien centré $(Z_x)_x$ de covariance $K(\cdot,\cdot)$ et à trajectoires $L^2(\mu)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(Z_x | Z_s,\ s \in \mathcal{S}\right) = \sum_k \phi_k(x) \int_{\mathcal{S}} \phi_k(t) Z_t d\mu(t),$$

les ϕ_k étant les *fonctions propres régularisées* associé à T_μ.

Remarque : Le choix de la mesure μ n'a théoriquement pas d'influence sur la solution, néanmoins ce choix pourra avoir une influence et terme de coût numérique, notamment lorsque la solution devra être approchée (série tronquée).

Illustrations en dimension 2 : On considère un noyau de covariance de type gaussien :

$$K_\theta(x,y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\theta}}, \quad \text{avec } \theta = 2$$

On souhaite tout d'abord simuler un processus gaussien centré de covariance $K(\cdot,\cdot)$ conditionnellement au fait que ce dernier est nul sur un cercle centré en zéro et de rayon $R = 3$. Après étude de l'opérateur associé à K et à la mesure de Lebesgue sur le cercle, on obtient par exemple :

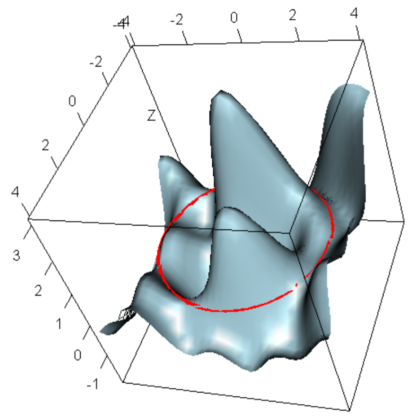

Figure 1: Réalisation d'un processus centré de covariance K nul sur le cercle

On utilise ensuite le noyau obtenu dans un modèle de krigeage (les points à interpoler sont les sphères rouges) :

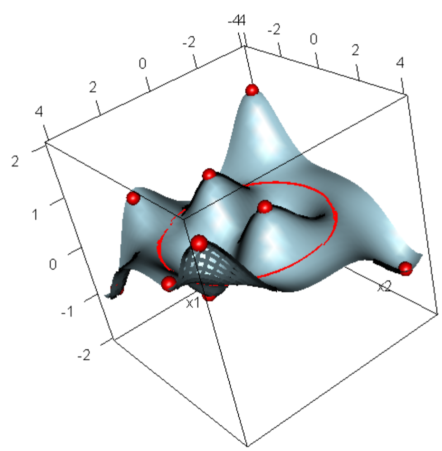

Figure 2: Meilleur prédicteur d'un krigeage avec condition sur le cercle

Conclusion : Le problème d'interpolation est ainsi "transformé" en un problème spectral permettant une approximation efficace d'éléments tels que le meilleur prédicteur. Un cas d'application quasi-industriel est actuellement à l'étude.