

# Propriétés des indices de sensibilité de Sobol pour un modèle à entrées et sorties spatialisées

**Nathalie Saint-Geours** (saintge@teledetection.fr)  
Doctorante en 2<sup>ème</sup> année - AgroParisTech, UMR TETIS

**Christian Lavergne** - Université de Montpellier, I3M  
**Jean-Stéphane Bailly** - AgroParisTech, UMR TETIS  
**Frédéric Grelot** - Cemagref, UMR GEAU



L'analyse dite *de Sobol* est une approche communément utilisée pour étudier comment les incertitudes pesant sur les facteurs d'entrée  $X_i$  d'un modèle  $Y = \mathcal{M}(X_1, \dots, X_k)$  influencent la variabilité de sa sortie  $Y$  [7]. Adaptée au cas de codes de calcul de type «*boîte noire*» peu coûteux en temps CPU, elle s'appuie sur la décomposition de la variance totale  $\text{Var}[Y]$  en variances conditionnelles, ce qui conduit après normalisation à définir des indices de sensibilité de premier ordre  $S_i$  et totaux  $ST_i$  pour chaque  $X_i$ . Dans sa formulation initiale, elle est limitée au cas où les facteurs d'entrée  $X_i$  sont scalaires, tout comme la sortie  $Y$ . Or, dans le vaste champ de la recherche en environnement, nombre de modèles incluent une dimension spatiale marquée, soit qu'ils fassent appel à des cartes comme variables d'entrée, soit que leurs sorties soient spatialisées (cartes de risque par exemple). De ce fait, l'analyse de Sobol peine à se développer dans ces champs thématiques [2].

Plusieurs publications proposent des méthodes permettant d'intégrer dans une analyse de sensibilité de Sobol des facteurs d'entrée  $X_i$  ou des sorties  $Y$  distribués spatialement [1, 3, 4, 5]. Dans cette présentation, on explore les **propriétés analytiques** des indices de Sobol estimés dans un tel cadre. On met en évidence des propriétés liées à la nature spatialisée des entrées et sorties d'un modèle : influence des changements d'échelle, de l'auto-corrélation spatiale dans les facteurs d'entrée  $X_i$ , de la représentation de l'espace sur une grille discrète. Ces développements confirment l'intérêt de l'analyse de Sobol pour aborder la complexité de modèle environnementaux spatialisés. Une application sur un modèle d'évaluation économique du risque d'inondation est proposée.

## Indices de Sobol ponctuels et zonaux pour un modèle spatialisé

Considérons le modèle  $\mathcal{M}$  défini par :

$$Y = \mathcal{M}(X_1, X_2, Z)$$

où  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires réelles de lois normales et  $Z(u)$  un champ aléatoire Gaussien défini sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . La structure de covariance spatiale de  $Z$  est décrite par un variogramme  $\gamma$  croissant de portée  $l$ .

La sortie du modèle est un champ spatialisé  $Y(u)$  :

$$\forall u \in \mathcal{D}, \quad Y(u) = f(X_1, X_2, Z(u))$$

où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction quelconque. Pour toute zone  $\Omega \subset \mathcal{D}$ , la valeur moyenne du champ  $Y(u)$  sur  $\Omega$  est notée  $Y_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{u \in \Omega} Y(u) du$ .

On définit les **indices de sensibilité ponctuels**  $S_{X_1}^u$ ,  $S_{X_2}^u$  et  $S_Z^u$  comme les indices de sensibilité de premier ordre des facteurs d'entrée  $X_1$ ,  $X_2$  et  $Z$  par rapport à  $Y(u)$ , et les **indices de sensibilité zonaux**  $S_{X_1}^\Omega$ ,  $S_{X_2}^\Omega$  et  $S_Z^\Omega$  comme les indices de sensibilité des facteurs d'entrée par rapport à  $Y_\Omega$ .

## Propriétés analytiques

Dans le cas où la fonction  $f$  est linéaire en  $Z(u)$  ( $f(X_1, X_2, Z(u)) = X_1 \cdot Z(u) + X_2$ ), on montre que :

- l'indice zonal  $S_Z^\Omega$  décroît avec la portée  $l$  du variogramme  $\gamma$  ;
- l'indice zonal  $S_Z^\Omega$  décroît lorsque la zone  $\Omega$  est dilatée ;
- l'erreur d'estimation sur  $S_Z^\Omega$  due à la discrétisation du domaine  $\mathcal{D}$  sur une grille régulière est en  $1/p$ , où  $p$  est le pas de la grille.

On précise ces relations pour le cas d'un variogramme  $\gamma$  de forme exponentielle. On montre comment ces propriétés peuvent s'étendre au cas plus général d'une fonction  $f$  non linéaire.

### **Application à un modèle d'évaluation économique du risque d'inondation**

Les propriétés mises en évidence sont illustrées sur un modèle spatialisé d'évaluation économique du risque

d'inondation appliqué sur la basse vallée de l'Orb (Hérault) [6]. L'approche proposée permet (1) d'intégrer à l'analyse des facteurs d'entrée spatialisés incertains (carte d'occupation du sol, Modèle Numérique de Terrain) (2) d'étudier les sorties spatialisées du modèle ACB-DE par la réalisation de cartes d'indices de sensibilité ponctuels (3) de comparer l'influence relative des facteurs d'entrée à différentes échelles, par la réalisation de cartes de sensibilité de résolution spatiale croissante.

---

## Références

- [1] M. Crosetto and S. Tarantola. Uncertainty and sensitivity analysis : tools for GIS-based model implementation. *Int. J. Geographical Information Science*, 15 :415–437, 2001.
- [2] M. Delgado and J. Sendra. Sensitivity analysis in multicriteria spatial decision-making : A review. *Human and Ecological Risk Assessment*, 10(6) :1173–1187, 2004.
- [3] L. Lilburne and S. Tarantola. Sensitivity analysis of spatial models. *International Journal of Geographical Information Science*, 23 :2 :151–168, 2009.
- [4] A. Marrel, B. Iooss, M. Jullien, B. Laurent, and E. Volkova. Spatial global sensitivity analysis. Dépôt hal-00430171, 2009.
- [5] P. Ruffo, L. Bazzana, A. Consonni, A. Corradi, A. Saltelli, and S. Tarantola. Hydrocarbon exploration risk evaluation through uncertainty and sensitivity analyses techniques. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(10-11) :1155–1162, 2006.
- [6] N. Saint-Geours, J.-S. Bailly, F. Grelot, and C. Lavergne. Analyse de sensibilité de Sobol d'un modèle spatialisé pour l'évaluation économique du risque d'inondation. *Journal de la Société Française de Statistique, Spécial Analyse de sensibilité*, 2010. Soumis, en attente de seconde relecture.
- [7] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola. *Global Sensitivity Analysis - The Primer*. Wiley, 2008.

---

## À propos du doctorant et de la thèse

Diplômée de l'École Polytechnique en 2004 et de l'École Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts en 2009, je réalise depuis deux ans ma thèse au sein de l'UMR TETIS (AgroParisTech) à Montpellier, sous la direction de Christian Lavergne (Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier).

Mon travail porte sur l'«analyse de sensibilité d'un outil spatialisé d'évaluation économique du risque d'inondation». L'outil ACB-DE (Analyse Coût-Bénéfice - Dommages Évités) est utilisé par les gestionnaires de bassins versants pour évaluer la pertinence économique d'aménagement de protection contre les crues (digues, bassins de rétention...). Il produit des indicateurs synthétiques ou spatialisés qui sont utilisés pour guider l'action publique. L'objet du travail de thèse est de mettre en œuvre une analyse d'incertitude et de sensibilité de cet outil. Pour ce faire, on cherche à adapter l'analyse de sensibilité dite «de Sobol» au cas d'un modèle dont les entrées et les sorties sont distribuées spatialement. On s'intéresse aux effets des changements d'échelle et de corrélation spatiale dans les facteurs d'entrée sur la valeur des indices de sensibilité, aux procédures d'échantillonnage des facteurs d'entrée spatialisés, ainsi qu'au traitement de sorties multivariées par le biais de cartes d'indices de sensibilité.

