

Inférence bayésiennes pour la dynamique des gaz compressibles et propagation d'incertitudes par chaos polynômial itératif

Alexandre Birolleau

Commissariat à l'énergie atomique
CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France – UPMC

1 Contexte général de la thèse

Ma thèse porte sur l'inférence bayésienne pour la dynamique des gaz compressibles. Elle a débuté en février 2011 au Commissariat à l'énergie atomique de Bruyères-le-Châtel sous la direction de Didier Lucor (UPMC Paris VI) et encadrée par Gaël Poette (CEA).

L'étude s'inscrit dans le cadre de la Fusion par confinement inertiel (FCI). Lors de ce processus, on souhaite porter un microballon de Deutérium-Tritium aux conditions d'ignition par éclairage d'un laser très énergétique. Le microballon présente des défauts d'usinage incertains. L'enjeu est important car ces défauts peuvent engendrer une rupture de la coquille du microballon avant que les conditions physiques pour l'ignition soient réunies.

On s'intéressera précisément aux problèmes d'interfaces instables, initialement incertaines, entre deux fluides subissant chocs ou accélérations. L'incertitude d'entrée porte sur la forme de la perturbation initiale. Pour les sorties, il s'agira de reconstruire la loi de l'interface au cours du temps.

2 Résumé

L'inférence bayésienne correspond à la démarche logique permettant de réviser la probabilité d'un événement. Il s'agit d'un outil puissant pour aborder les problèmes inverses. Nous nous concentrons ici sur l'accélération de l'inférence bayésienne par chaos polynômial.

Nous considérons un modèle direct u dépendant du temps, de l'espace et d'un paramètre incertain $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Nous disposons de mesures expérimentales y_1, \dots, y_N correspondant aux points de mesure $(x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N)$. Nous supposons la relation additive suivante entre le modèle théorique u , la mesure y et l'erreur de mesure ε :

$$y = u(x, t; \omega) + \varepsilon \tag{1}$$

où ε suit la loi π_ε supposée donnée par le dispositif expérimental. Nous disposons également d'une information a priori sur le paramètre ω contenue dans la loi de probabilité a priori π_{pr} . En supposant les mesures indépendantes et en appliquant le théorème de Bayes, nous obtenons la

densité de probabilité a posteriori sur ω :

$$\pi_{\text{post}}(\omega) \propto \pi_{\text{pr}}(\omega) \prod_{i=1}^N \pi_{\varepsilon}(y_i - u(x_i, t_i; \omega)). \quad (2)$$

Chaque évaluation de l'a posteriori nécessite un appel au modèle direct. Une approximation du modèle u par chaos polynômial fut proposée dans [1, 2] pour traiter les cas pour lesquels un code de simulation coûteux en temps de calcul résout u . Ces articles soulignent deux problèmes : la même base polynômiale est utilisée pour toutes les approximations et les solutions discontinues ne sont pas bien gérées. Or, dans les applications hydrodynamiques qui nous intéressent, des discontinuités apparaissent en temps fini.

Pour cela, nous introduisons une approche itérative du chaos polynômial (i-gPC) pour construire les approximations du modèle. Il s'agit, au cours de l'algorithme itératif, d'adapter la base polynômiale de projection à la réponse du modèle. Nous mettons en œuvre notre approche sur un cas test hydrodynamique 1D dit cas test de SOD pour lequel la position de l'interface initiale est incertaine.

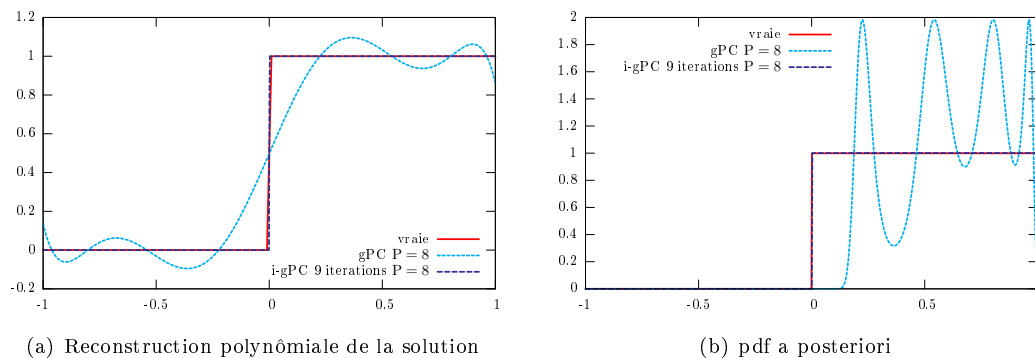


FIG. 1 – $u(x) = \mathbf{1}\{x \geq 0\}$, mesure en $x_0 = 0, 2$. cf. exemple numérique de [2] section 5.2.

Références

- [1] Y. Marzouk, H. Najm, L. Rahn, Stochastic spectral methods for efficient bayesian solution of inverse problems, *Journal of Computational Physics* 224 (2) (2007) 560–586.
- [2] Y. Marzouk, D. Xiu, A stochastic collocation approach to bayesian inference in inverse problems.
- [3] R. Ghanem, P. Spanos, *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Dover Pubns, 2003.
- [4] G. Poëtte, B. Després, D. Lucor, Uncertainty quantification for systems of conservation laws, *Journal of Computational Physics* 228 (7) (2009) 2443–2467.
- [5] Y. Marzouk, H. Najm, Dimensionality reduction and polynomial chaos acceleration of bayesian inference in inverse problems, *Journal of Computational Physics* 228 (6) (2009) 1862–1902.
- [6] C. Robert, *The Bayesian choice : from decision-theoretic foundations to computational implementation*, Springer Verlag, 2007.