

# Analyse de sensibilité pour des probabilités de dépassement de seuil

Paul LEMAITRE  
paul.lemaitre@edf.fr

EDF R&D 78401 Chatou

## Présentation du problème

Le cadre est celui de l'étude d'un modèle numérique représentant un phénomène physique complexe. L'événement considéré est le dépassement (ou non) d'un seuil par une sortie scalaire du modèle, représentant par exemple la défaillance (ou non) du système. Les variables d'entrée du modèle sont souvent des paramètres physiques mal connus ou intrinsèquement aléatoires. Ces derniers sont modélisés par des variables aléatoires, définies par une loi jointe de probabilité. L'étude de toutes les combinaisons d'entrées pondérées par leur probabilité d'occurrence permet d'obtenir une probabilité de défaillance globale du système. Cette probabilité de défaillance est donc la quantité d'intérêt de l'étude.

Dans le contexte d'analyse de l'incertitude pour un modèle numérique (que la quantité d'intérêt soit scalaire ou probabiliste), on peut être intéressé par la quantification de l'impact de l'incertitude de chaque paramètre d'entrée sur la sortie. Cette étape du travail est appelée analyse de sensibilité. L'intérêt industriel est multiple [1]. La présente communication s'inscrit dans le cadre d'une thèse industrielle qui a pour objectif de résoudre la problématique de *l'analyse de sensibilité dans le cadre de problèmes fiabilistes*. Le travail proposé ici consiste en une présentation puis une comparaison de trois méthodes d'analyse de sensibilité appliquées à un problème de dépassement de seuil.

## Notations

On définit par  $G$  le modèle numérique et par  $\mathbf{X}$  le vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  de densité de probabilité  $f_{\mathbf{X}}$  des entrées du modèle. Les composantes du vecteur  $\mathbf{X}$  sont considérées indépendantes deux à deux. La fonction  $G$  est dite *fonction de défaillance*, car on s'intéresse particulièrement aux événements  $G(\mathbf{x}) \leq 0$ . Le *domaine de défaillance* est défini par  $D_f = \{G(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$ . La quantité d'intérêt de l'étude est donc :

$$P = \int 1_{\{G(\mathbf{x}) \leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[1_{\{G(\mathbf{x}) \leq 0\}}]$$

## Méthodes

Une première partie du travail tient en une application de méthode fiabiliste notamment l'utilisation des cosinus directeurs issus des techniques FORM/SORM [2]. Ces dernières, fondées sur une approximation de la surface de défaillance par un hyperplan ou une hypersurface quadratique ont été développées pour estimer la probabilité de défaillance à très faible coût.

L'application de méthode d'analyse de sensibilité "classique" est également effectuée. La méthode testée est celle dite des indices de Sobol [3], très utilisée dans le cadre de l'analyse de sensibilité globale. Ces indices utilisent la décomposition de la variance de la sortie et sont pensés pour des sorties scalaires continues. Cette méthode se révèle inadaptée pour des modèles fiabilistes.

L'étude se termine par la présentation d'une méthode spécifiquement développée pour quantifier la sensibilité de la probabilité de défaillance à des changements dans les lois d'entrées. Cette méthode a pour qualité de ne pas faire de nouveaux appels à la fonction de défaillance, et se trouve être l'amélioration d'un travail précédent [4].

## Détails de la méthode proposée

L'idée directrice est de modifier la loi de la  $i^{\text{ème}}$  entrée, de loi d'origine  $f_{X_i}$  par une autre loi  $f_{X_{i\delta}}$  telle que  $KL(f_{X_i}, f_{X_{i\delta}}) = \delta$ , où KL est la divergence de Kullback-Leibler. La densité marginale de la  $i^{\text{ème}}$  variable modifiée  $X_{i\delta}$  est déterminée par  $f_{X_{i\delta}}(t) = \exp(\tau t - \psi(\tau))f_{X_i}(t)$  où  $\psi(\cdot)$  est une fonction de normalisation. Ce changement de loi fait apparaître les comportements extrêmes (heuristique). Pour une valeur de  $\delta$  fixée, on montre qu'il existe deux solutions  $\tau^*$  à l'équation :

$$KL(f_{X_i}, f_{X_{i\delta}}) = \delta$$

On peut donc modifier de deux façon la loi de toute entrée à distance de Kullback-Leibler fixée. Pour chaque valeur  $\tau^*$  reliée à une intensité de modification de loi  $\delta$ , on obtient une nouvelle probabilité de défaillance :

$$P_{i\delta} = \int 1_{\{G(\mathbf{x}) \leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \frac{f_{X_{i\delta}}(x_i)}{f_{X_i}(x_i)} d\mathbf{x}.$$

On obtient en fait deux valeurs  $P_{i\delta 1}$  et  $P_{i\delta 2}$  par  $\delta$  : pour des raisons de clarté on n'en considère qu'une dans la suite de l'abstract. Un indice de sensibilité est proposé :

$$S_{i\delta} = \frac{P_{i\delta} - P}{P}.$$

La quantité  $P$  est estimée par Monte-Carlo, c'est-à-dire avec un grand nombre de tirages  $\mathbf{x}^k$  de loi d'entrée  $f_{\mathbf{X}}$ . La quantité  $P_{i\delta}$  est estimée par tirage d'importance inverse à partir des mêmes appels au code que ceux utilisés pour estimer  $P$ . Une estimation de  $S_{i\delta}$  est alors obtenue. Les deux estimateurs étant fortement corrélés, des techniques de majoration de l'erreur sont mises en place.

## Résultats

Les méthodes sont comparées sur la base de résultats numériques obtenus pour des modèles analytiques jouets, puis pour le cas plus réaliste CRUE. Ce modèle porte sur la probabilité que la hauteur d'eau d'une rivière dépasse la hauteur d'une digue protégeant un site industriel. Ceci permet d'identifier les variables pour lesquelles des manques de connaissances impactent le plus la probabilité de défaillance.

## Références

- [1] Saltelli, A. et al. (2000), Sensitivity analysis, Wiley New York.
- [2] Lemaire M. (2005), Fiabilité des structures : couplage mécano-fiabiliste statique, Hermès Science Publications.
- [3] Sobol, IM. (1993), Sensitivity analysis for non-linear mathematical models, Mathematical Modelling and Computational Experiment, 1, 1, 407-414.
- [4] Lemaître P., Arnaud A. (2011), Hiérarchisation des sources d'incertitudes vis-à-vis d'une probabilité de dépassement de seuil - une méthode basée sur la pondération des lois. In Proceedings des 43èmes Journées de Statistiques, Tunis, Tunisie, Mai 2011

## Présentation de l'étudiant et du contexte général de la thèse :

Je suis actuellement en deuxième année de thèse à EDF R&D, dans le département de Management des Risques Industriels. La thèse débutée en octobre 2011 est dirigée par Pierre Del Moral (Inria Sud-Ouest) et encadrée par Aurélie Arnaud et Bertrand Iooss (EDF R&D). Le sujet de cette thèse est l'*analyse de sensibilité dans un contexte d'études fiabilistes*. La thèse répond à la nécessité d'utiliser des codes de calcul phénoménologiques pour les évaluations de sûreté des installations nucléaires d'EDF.