Thèse sur la modélisation stochastique en hydraulique

Encadrement: Nicole Goutal (Laboratoire d'hydraulique Saint-Venant, EDF R&D),
Sébastien Boyaval (Laboratoire d'hydraulique Saint-Venant, Ecole des Ponts ParisTech)
& Julien Reygner (CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech)

August 30, 2016

Abstract

La question est comment raisonnablement probabiliser des modèles hydrauliques (pour les crues et les inondations) avec des données observables. Il s'agit en particulier de donner une forme mathématique claire à la réponse, avec des outils d'analyse discrète (calculables). Pour cela, on propose au doctorant un coencadrement LHSV/CERMICS mêlant des expertises en modélisation numérique des crues/inondations et en méthodes probabilistes de calcul.

Les modèles hydrauliques basés sur les équations de Saint-Venant 1D pour la section mouillée S et le débit linéique Q sont utilisés opérationnellement pour la prédiction des crues et des inondations comme un système d'évolution en temps, avec une condition initiale et un forçage incertains, après calibration des paramètres (friction) sur un ensemble d'observations également incertain.

De nombreux utilisateurs aimeraient évaluer quantitativement la fiabilité de leur prévision par rapport à une mesure de l'incertitude sur les données (condition initiale, termes sources), ainsi que par rapport à l'erreur de calibration du modèle. Pour cela, on cherche à construire un cadre mathématique "utile" (c'est-à-dire calculable avec une précision suffisante sur un ordinateur).

Dans un premier temps, on propose d'étudier la réponse d'un modèle simple déjà calibré (à une valeur déterministe) à un forçage stochastique. Les apports aléatoires (précipitations moins infiltrations) sont alors centrés autour d'une valeur saisonnière, avec des incréments a priori indépendants en temps mais corrélés en espace : on pourrait utiliser les statistiques établies par des hydrologues pour un cas d'application concret, mais on commencera par un modèle aléatoire idéal.

Ensuite, on envisagera plusieurs prolongements selon les résultats obtenus: l'utilisation du modèle stochastique simple (calibration, et exploitation numérique pour évaluer des probabilités d'événements rares), et sa complexification avec la physique usuellement établie (Saint-Venant).

1 Prévision d'ensemble d'ondes cinématiques

Soit une rivière 1D de pente $Z_f(x)$ (le long de l'axe hydraulique) strictement décroissante, et de friction connue donnée par un coefficient de Strickler déterministe K_s.

On peut réduire la modélisation d'une crue à l'onde cinématique (obtenue asymptotiquement au premier ordre dans Saint-Venant par la mise à l'échelle $t \to t/\epsilon$, $x \to x/\epsilon$) comme solution d'un problème de Cauchy pour S satisfaisant la loi de conservation stochastique

$$\partial_t S + \partial_x \left(K_s \sqrt{|\partial_x Z_f|} S^{\frac{5}{3}} / P^{\frac{2}{3}} \right) = q \tag{1.1}$$

où le périmètre mouillé $P(S)$ est une fonction connue (croissante, positive) et la source $q = r - i$ est un terme aléatoire lié aux précipitations, ainsi que les conditions limites pour S. Pour commencer, on pourra donc étudier le problème de Cauchy pour la loi de conservation stochastique

$$dS + div(A(S)) = \Phi(S) dW(t) \tag{1.2}$$

(pas de précipitation en moyenne) avec des conditions périodiques: $x \in \mathbb{T}^d$, afin de se placer dans le cadre théorique développé par Debussche et Vovelle [5, 6], quoiqu'on ne puisse ainsi simuler S trajectoriellement qu'en supposant Φ à support borné.

Un premier travail consistera à caractériser la solution en fonction de la dépendance spatiale du bruit comme dans [1], avec des schémas numériques de type Volumes Finis comme ceux étudiés dans [3]. En particulier, on souhaite décrire le comportement en temps long de S, car d'après [5, 6], il existe une mesure invariante de S, c'est-à-dire une mesure de probabilité π sur $L^2(\mathbb{T}^d)$ telle que si la condition initiale S_0 du problème de Cauchy est distribuée selon π, alors pour tout $t \geq 0$, la fonction $S(t, \cdot)$ reste distribuée selon π. Et pour une condition initiale u_0 quelconque, il est naturel de s'attendre à ce que $S(t, \cdot)$ converge en loi vers π.

Mais il n'est pas prouvé que les schémas numériques soient bons en temps long. Un second travail est donc la qualification des schémas numériques pour le temps long. Une approche possible pour aborder ce problème consiste à écrire une semi-discrétisation spatiale sous la forme d'un processus de diffusion $(X(t))_{t \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^N$, solution de

$$dX_i(t) = F_i(X_{i-1}(t), X_i(t), X_{i+1}(t))dt + \sum_{j=1}^{N} \sigma_{i,j} dB_j(t) \tag{1.3}$$

où N est le nombres d'intervalles (cellules volumes finis) en lesquels $\mathbb{T}$ a été découpé, $X_i(t)$ représente une approximation de l'intégrale de $u(t, x)$ sur le i-ème intervalle, la fonction $F_i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ provient d'un choix de flux numérique, $B_j(t)$ représente l'intégrale du terme de bruit sur le j-ème intervalle, et les $\sigma_{i,j}$ décrivent les corrélations spatiales du bruit. Une autre approche possible est d'étudier les schémas Volumes Finis sur des temps longs en présence d'un forçage déterministe pour lequel on connaît l'attracteur en temps long de la solution.

Enfin, on étudiera comment introduire des conditions limites non périodiques dans le problème, conditions éventuellement aléatoires elles-aussi (telles un hydrogramme).

2 Prolongements

D'une part, on peut envisager l'utilisation pratique du modèle stochastique simple défini ci-dessus. Usuellement, les modèles numériques de rivières sont calibrés pour de la "propagation" (de crues) avec des observations réparties en temps, l'idée étant que les coefficients empiriques soient liés à des équilibres autour desquels chaque observation particulière (typiquement, une crue) est une perturbation.

- Peut-on définir un coefficient de Strickler K_s cohérent avec (1.1) ?
- Quelle incertitude en déduire sur une prévision étant donné un ensemble initial ?

On étudiera ensuite comment évaluer des événements rares en quantifiant les incertitudes.

D'autre part, l'onde cinématique est utilisée opérationnellement dans un certain nombre de codes, mais reste un modèle limité: peut-on prolonger des résultats

- à l'onde diffusante ?
- au système de Saint-Venant 1D ?
- au 2D ? (plaine d'inondation)

L'équation bilan des moments dans Saint-Venant est d'ailleurs aussi un modèle limité. Peut-on aussi introduire une dépendance stochastique du flux qui traduirait comme le bilan peut lui-même être soumis à de l'aléa (outre des incertitudes telles K_s ci-dessus) ? La pression dans Saint-Venant est modélisée (supposée hydrostatique): dans les fluides complexes, elle peut varier avec une microstructure fluctuante, et même dans l'eau, la pression fluctue (autour de la moyenne "Reynolds-average") dans les écoulements turbulents. Les équations hyperboliques avec flux stochastique semblent encore peu étudiées mis à part le cas paramétrique [8].

3 Contexte

Le programme de la thèse s'inscrit à l'interface de domaines de recherche très actifs en modélisation hydraulique et en analyse numérique: la quantification d'incertitudes et l'hydrodynamique statistique.

Au LHSV, le doctorant sera au contact direct de la communauté des hydrauliciens modélisateurs susceptibles d'utiliser les résultats de la thèse. Le doctorant pourra s'y *familiariser avec des problèmes concrets de modélisation* des crues et des inondations, et lui-même *identifier des cas-tests pertinents* pour appliquer et évaluer ses schémas numériques. Il participera au projet de recherche "modélisation probabiliste des écoulements: aléas et incertitudes" avec d'autres chercheurs du laboratoire, qui le guideront vers les bonnes questions à se poser en méthodes de calcul pour l'hydraulique fluviale et l'aideront à trouver des réponses pertinentes [2, 4, 7].

Au CERMICS, le doctorant trouvera des expertises complémentaires au LHSV pour mener à bien une *analyse rigoureuse des schémas de calcul* proposés. En outre, le doctorant pourra échanger avec des chercheurs en analyse numérique et en modélisation aléatoire qui auront déjà expérimenté diverses applications physiques de leur expertise mathématique [8], une confrontation potentiellement inspiratrice de nouvelles méthodes pour l'hydraulique fluviale. Il contribuera enfin au thème "équations aux dérivées partielles stochastiques", en développement au sein du laboratoire.

References

[1] Audusse, E.; Boyaval, S.; Gao, Y. & Hilhorst, D. Numerical Simulations of the Inviscid Burgers Equations with Periodic Boundary Conditions and Stochastic Forcing. **ESAIM ProcS.** (2015) 48, 308-320

[2] Audusse, E.; Boyaval, S.; Goutal, N.; Jodeau, M. & Ung, P. Numerical Simulation of the Dynamics of Sedimentary River Beds with a Stochastic Exner Equation ESAIM Proc., 2015, 48, 321-340

[3] Bauzet, C.; Charrier, J. & Gallouët, T. Convergence of flux-splitting finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation Math. Comp., 2016

[4] Bozzi, S.; Passoni, G.; Bernardara, P.; Goutal, N. & Arnaud, A. Roughness and Discharge Uncertainty in 1D Water Level Calculations Environmental Modeling & Assessment, 2015, 20, 343-353

[5] Debussche, A. & Vovelle, J. Scalar conservation laws with stochastic forcing, revised version (2013).

[6] Debussche, A. & Vovelle, J. Invariant measure of scalar first-order conservation laws with stochastic forcing. **Probability Theory and Related Fields** (2015) 163, 575-611.

[7] Nabil El Mocayd ; Sophie Ricci ; Nicole Goutal ; Melanie C. Rochoux ; Sebastien Boyaval ; Cedric Goeury ; Didier Lucor ; Olivier Thual. Polynomial-chaos representation of 1D water level in open-channel flows with uncertain physical characteristics – Detailed analysis of steady flows (en preparation)

[8] Tryoen, J.; Le Maître, O.; Ndjinga, M. & Ern, A. Roe solver with entropy corrector for uncertain hyperbolic systems J. Comput. Appl. Math., 2010, 235, 491-506