

Réduction de dimension et Analyse de sensibilité

Proposition de stage M2R Mathématiques Appliquées

Alexandre Janon (Université Paris-Sud),

Maëlle Nodet, Clémentine Prieur (Université Grenoble 1/INRIA)

Contacts : alexandre.janon@math.u-psud.fr,

maelle.nodet@inria.fr, clementine.prieur@imag.fr



Contexte

La modélisation numérique environnementale est un aspect crucial des systèmes numériques de prévision (météorologie, océanographie, chimie atmosphérique, fleuves et crues, climatologie, etc.). Un modèle environnemental numérique traduit les équations mathématiques représentant la physique du système étudié. Dans ces modèles, de nombreuses incertitudes sont présentes :

- les équations sont une modélisation imparfaite de la réalité ;
- elles font souvent intervenir des paramètres mal connus (conditions initiales et aux limites, coefficients dans les équations, etc.) ;
- la solution numérique est une approximation de la solution continue, tronquée à une certaine résolution spatiale, temporelle, et/ou fréquentielle.



Analyse de sensibilité

Il est donc important de pouvoir mesurer l'impact d'un paramètre sur la qualité de la solution et d'identifier les paramètres "sensibles" au sens où une petite variation de ce paramètre donnera une grande variation dans la solution du modèle. L'analyse de sensibilité est l'ensemble des méthodes, stochastiques comme déterministes, qui mesurent la sensibilité d'un paramètre dans le modèle. Parmi les différentes méthodes d'analyse de sensibilité, nous privilégierons la méthode reposant sur le calcul des indices de sensibilité de Sobol' [5, 4].

Le calcul numérique (approché) de ces indices nécessite l'obtention des solutions numériques du modèle pour un grand nombre d'instances des paramètres d'entrée [3, 6]. Dans de nombreux contextes, chaque lancement du modèle peut nécessiter un temps de calcul important, ce qui rend impossible l'estimation des indices de Sobol' avec la précision désirée. Il est alors nécessaire d'accélérer l'évaluation du modèle. L'approche proposée consiste à réduire la dimension du problème.

Réduction de dimension

L'idée de la réduction de modèle est la suivante. Lorsque l'on travaille avec un modèle non réduit, on commence par discrétiser le domaine de travail, puis on résout les équations sur la grille choisie, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs des variables inconnues en chaque point du domaine. Si la grille possède des centaines de milliers de points de discrétisation, ce sont autant de variables à déterminer. La réduction de modèle permet de diminuer le nombre de variables à calculer en utilisant une base bien choisie. Le choix de la base est crucial et de lui dépend l'efficacité du modèle réduit.

Le principe général est donc le suivant. Supposons que notre système est décrit par un vecteur d'état $u \in E$ (par exemple, u contient la valeur des vitesses des courants ainsi que la hauteur d'eau de l'océan en chaque point du domaine), de sorte que la taille de u est très grande : elle vaut le nombre de points de grille multiplié par le nombre de variable (par exemple 10^6 en océanographie...). L'objectif est de trouver des vecteurs $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r) \in E^r$ judicieux, de sorte que u puisse se décomposer avec une bonne précision dans cette base :

$$u \simeq \sum_{i=1}^r u_i \phi_i$$

où les u_i sont des coefficients réels. Il s'agit ensuite de ne plus travailler dans l'espace E (de grande dimension), mais dans l'espace engendré par les ϕ_i (qui est de dimension r). Le gain en dimension est très grand, puisqu'en pratique on peut prendre $r < 100$, et le gain de calcul est conséquent.

Objectifs

L'objectif principal de ce stage est de comparer différentes techniques de réduction, à la fois déterministes et stochastiques [1], et d'évaluer leurs performances pour l'analyse de sensibilité. Les modèles considérés seront des équations aux dérivées partielles paramétrées, prototypes de modèles environnementaux (océano, climat) plus réalistes. Nous nous efforcerons de fournir des barres d'erreur [2] pour l'estimation des indices de sensibilité, ce qui est une des exigences de plus en plus courantes, notamment en sciences environnementales.

Déroulement du stage

Ce stage sera équilibré entre les trois aspects suivants :

- bibliographie sur l’analyse de sensibilité et les différentes techniques de réduction ;
- adaptation à un modèle d’EDP particulier ;
- implémentation à l’aide des logiciels R et Matlab.

Compétences utiles

- statistiques ;
- R et/ou Matlab ;
- EDP et analyse numérique.

Dates et lieu du stage

Le stage se déroulera au sein du Laboratoire Jean Kuntzmann, dans l’équipe INRIA MOISE (Clémentine Prieur et Maëlle Nodet). Eventuellement, le stage pourra se dérouler sur Orsay, Paris XI (Alexandre Janon).

Poursuite en thèse

Ce stage pourra éventuellement déboucher sur une thèse au sein de l’équipe MOISE.

Gratification

Traditionnelle pour un stage (436 euros/mois).

Références

- [1] S. Boyaval, C. Le Bris, T. Lelièvre, Y. Maday, N. C. Nguyen, and A. T. Patera. Reduced basis techniques for stochastic problems. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 17(4) :435–454, 2010.
- [2] A. Janon, M. Nodet, and C. Prieur. Uncertainties assessment in global sensitivity indices estimation from metamodels. Preprint available at <http://hal.inria.fr/inria-00567977>, 2011, *Accepted in International Journal for Uncertainty Quantification*.
- [3] Alexandre Janon, Thierry Klein, Agnes Lagnoux-Renaudie, Maëlle Nodet, and Clémentine Prieur. Asymptotic normality and efficiency of two Sobol index estimators. *ESAIM : Probability and Statistics*, 2013.
- [4] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola. *Global sensitivity analysis : the primer*. Wiley Online Library, 2008.
- [5] I.M. Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1-3) :271–280, 2001.
- [6] J.Y. Tissot and C. Prieur. Variance-based sensitivity analysis using harmonic analysis. Technical report, <http://hal.inria.fr/hal-00680725>, 2012.